PROCEEDINGS OF IAM, V.8, N.1, 2019, pp.3-13

МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОРЯДКА ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ *

Ф.А. Алиев[1], Н.А. Алиев[1], М.М. Муталлимов[1], А.А. Намазов[1]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: f_aliev@yahoo.com
e-mail: mutallim@mail.ru
e-mail: atif.namazov@gmail.com

Резюме. Работа посвящена определению порядка дробной производной, когда колебательный процесс происходит внутри Ньютоновской жидкости. Сначала решение исследуемого уравнения сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода и с помощью метода наименьших квадратов приводится метод определения порядка дробной производной. На простом примере приводится иллюстрация определения этого порядка.

Ключевые слова: Колебательная система, производная дробного порядка, уравнение Вольтерра второго рода, метод наименьших квадратов.

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение.

Известно [5], что колебательные процессы с дробными демпферами описываются следующим линейным обыкновенным дифференциальным уравнением с производными дробного порядка и постоянными коэффициентами

$$y''(x)+aD^{\alpha}y(x)+by(x)=f(x),\ (x\ge x_0>0), \tag{1}$$

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ \alpha\in(1,2),$$

где $a=\dfrac{2S\sqrt{\mu\rho}}{m}$, $b=\dfrac{k}{m}$ и рассматривается жесткая пластина с массой m и площадью S, ρ-плотность жидкости, μ- постоянная вязко упругости, постоянная k-характеризует свойства пружины (см. рис. 1), $f(x)$ -внешняя сила .

Отметим, что в [5, 6] рассмотрена соответствующая задача при $\alpha=\dfrac{3}{2}$, где при $a=3$, $b=1$, $f=8$ приведённое в [6] решение не удовлетворяет уравнению задачи (1). Интересно, что в классических работах [13]

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 09.10.2018

математическая модель штанго-насосных установок при добыче нефти из-за сложности исследования в уравнении задачи (1) выбрано $\alpha = 1$. На самом деле порядок α в (1) зависит от выше приведенных параметров, m, ρ, k, s, μ. Поэтому, конкретно для перечисленных параметров, α будет отлично от единицы и имеет смысл привести алгоритм для его определения. Однако, существующие методы [1,10] сталкиваются с трудностями из-за неизвестности порядка α. Поэтому, здесь, не меняя существующую новую форму уравнения (1), нужно ставить соответствующую новую задачу идентификации, отличающую от классических [8,12].

В [8] кроме основной неизвестной ищутся коэффициенты уравнения или граничного условия или же их правые части. А в [12], кроме основной неизвестной ищется часть или вся граница.

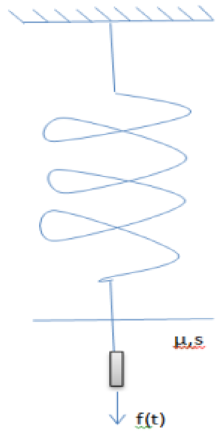

Рис.1

В данной работе ставится новое поколение обратной задачи, а именно, кроме основной неизвестной, ищется порядок дробной производной дифференциального уравнение (1).

В излагаемой работе сначала задача (1) с помощью определения дробно-производной Римана-Лиувилля [9,11] сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода [14], которое с применением метода последовательности подстановок сводится к решению в виде резольвентного ядра, соответствующей ряду Неймана. Далее, для конкретных значений $\alpha_i \in (1,2)$ строятся различные решения, которые принимаются как статистические данные [2-4,7] для задачи (1). Используя метод наименьших квадратов [2], впервые приведены задачи идентификаций для определения порядка дробно-производных α. Результаты иллюстрируются на конкретном примере колебательных систем, где с помощью метода деления пополам [7] находится порядок производной α на интервале $(1,2)$ с точностью 10^{-4}.

2. Сведение задачи (1) к интегральному уравненению Вольтерра II рода.

Как известно [8,9], определение дробной производной Римана-Луивилля задается в виде

$$D^{\alpha} y(x) = \frac{d^2}{dx^2} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} y(t)dt, \alpha \in (1,2), \ \mathrm{x} \geq x_0 > 0 \ , \qquad (2)$$

Тогда учитывая (2) в (1) имеем

$$y'' + a\frac{d^2}{dx^2} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} y(t)dt + by(\mathrm{x}) = \mathrm{f(x)} \ . \qquad (3)$$

Интегрируя левую и правую часть уравнения (3) от x_0 до x получим:

$$y'(x)-y'(x_0)+a\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}y(t)dt-a\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}y(t)dt\Big|_{x=x_0}+b\int_{x_0}^{x}y(t)dt=\int_{x_0}^{x}f(t)dt\,. \quad (4)$$

Вычислим первый интеграл, входящий в левую часть (4)

$$-\int_{x_0}^{x}y(t)d_t\,\frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}=-y(t)\frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}\Bigg|_{t=x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}y'(t)dt\ ,$$

где $2-\alpha>0$

Тогда соответствующее четвертое слагаемое из (4) примет вид

$$\begin{aligned}-a\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}y(t)dt\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}\Bigg|_{x=x_0}&=a\frac{d}{dx}\left[-y(x_0)\frac{(x-x_0)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}y'(t)dt\right]_{x=x_0}\\&=a\left[-y(x_0)\frac{(x-x_0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}y'(t)dt\right]_{x=x_0}.\end{aligned} \quad (5)$$

Не теряя общности, выберем начало координат так, чтобы y_0 из (1) приравнялся бы к нулю, т.е. из (1) $y_0=0$. Учитывая последнее в (5) имеем

$$a\int_{x_0}^{x}y'(t)dt\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}\Bigg|_{x=x_0}=0\ , \quad (6)$$

где при помощи (6) уравнение (4) примет вид

$$y'(x)-y_1+a\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}y(t)dt+b\int_{x_0}^{x}y(t)dt=\int_{x_0}^{x}f(t)dt\ . \quad (7)$$

Интегрируя (7) от x_0 до x имеем

$$y(x)-y_1(x-x_0)+a\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}y(t)dt+b\int_{x_0}^{x}(x-t)y(t)dt=\int_{x_0}^{x}(x-t)f(t)dt\,,$$

или же

$$y(x)+\int_{x_0}^{x}\left[a\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b\cdot(x-t)\right]y(t)dt=\int_{x_0}^{x}(x-t)f(t)dt+y_1(x-x_0)\equiv F(x)\ . \quad (8)$$

Таким образом, задача (1) сведена к следующему интегральному уравнению Вольтерра второго рода вида [14]

$$y(x)+\int_{x_0}^{x}K_\alpha(x-t)y(t)dt=F(x)\ , \quad (9)$$

где

$$K_\alpha(x-t)=a\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x-t)\ , \quad (10)$$

$$F(x)=\int_{x_0}^{x}(x-t)f(t)dt+y_1(x-x_0)\ , \qquad (11)$$

т.е. задача (1) сведена к интегральному уравнению (9).

3. Дискретизация уравнения (9).

Пусть уравнение (1) определено на интервале $[x_0,l]$, разобьём последнее на n частей с постоянными шагом h, т.е. $x_k=x_0+kh$ и $x_n=l$.

Заменяя интегральное выражение в (9) конечной суммой, представим уравнение (9) в следующем виде

$$y_i+\sum_{k=0}^{i-1}K_\alpha(x_i-x_k)y_k\cdot h=F_i, i=\overline{1,n}\ , \qquad (12)$$

$$K_\alpha(x_i-x_k)=a\frac{(x_i-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_i-x_k),\ k=\overline{0,i-1}, \qquad (13)$$

$$F_i=\sum_{k=0}^{i-1}(x_i-x_k)f(x_k)\cdot h+y_1(x_i-x_0)\ . \qquad (14)$$

Теперь рассмотрим разностное уравнение (12) при $i=1$ т.е.

$y_1+K_\alpha(x_1-x_0)y_0h=F_1$.

Поскольку $y_0=0,$ то $y_1=F_1$.

При $i=2$ из (12) получим:

$y_2+K_\alpha(x_2-x_0)y_0h+K_\alpha(x_2-x_1)y_1h=F_2$,

или же

$y_2=F_2-K_\alpha(x_2-x_1)y_1h$.

Продолжая этот процесс, для y_n получим

$y_n+K_\alpha(x_n-x_1)y_1h+K_\alpha(x_n-x_2)y_2h+...+K_\alpha(x_n-x_{n-1})y_{n-1}h=F_n$,

т.е.

$$y_n=-K_\alpha(x_n-x_1)y_1h-K_\alpha(x_n-x_2)y_2h-...-K_\alpha(x_n-x_{n-1})y_{n-1}h+F_n\ . \qquad (15)$$

Таким образом при заданных y_1 конечное y_n определяется с помошью (15)

4. Задача идентификации для определения порядка α.

Как отмечено выше, разделим $\alpha\in(1,2)$ на k подинтервалов с шагом $1/k$ и

$$\alpha_1=1+\frac{1}{k},\alpha_2=1+\frac{2}{k},...,\alpha_{k-1}=2-\frac{1}{k}\ .$$

Тогда для каждого заданного α_{k_i} вычислим y_n^i $\left(i=\overline{1k-1}\right)$ из (15) в следующем виде

$$y_n^i = -K_{\alpha_i}(x_n - x_1)y_1 h - K_{\alpha_i}(x_n - x_2)y_2 h - ... - K_{\alpha_i}(x_n - x_{n-1})y_{n-1}h + F_n =$$
$$= -\sum_{m=1}^{n-1} K_{\alpha_i}(x_n - x_m)y_m h + F_n, \quad i = \overline{1, k-1} \ . \qquad (16)$$

Принимая $\boldsymbol{y_n^i (i = \overline{1, k-1})}$ как статистические данные [2-4] для нахождения $\alpha \in (1,2)$, составим следующий квадратичный функционал

$$J = \sum_{i=1}^{k-1} (y_n - y_n^i)^2 \ , \qquad (17)$$

который при выборе $\alpha \in (1, 2)$ достигал бы минимального значения y_i.
Для ясности, подставим в (15) в место y_i последовательно вычисленые значения через F_i, т.е. (17) переходит к виду

$$J = \sum_{i=1}^{k-1} (-\sum_{m=1}^{n-1} K_\alpha (x_n - x_m) y_m^i h + F_n - y_n^i)^2 \ . \qquad (18)$$

Поскольку (18) является выпуклой, то берем производные по α из (18) и приравниваем к нулю. Найденный $\overline{\alpha}$ из решения

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0 \ , \qquad (19)$$

будет дробным порядком производной уравнения (1), соответствующее колебательному процессу (см рис. 1)

Легко вычислим $\frac{\partial J}{\partial \alpha}$ из (18) и уравнение (19) переходит к следующему виду

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = -2\sum_{i=1}^{k-1} (-\sum_{m=0}^{n-1} K_\alpha (x_n - x_m) y_m^i h + F_n - y_n^i) \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\partial K_\alpha (x_n - x_m)}{\partial \alpha} y_m^i h = 0 \ . \qquad (20)$$

Учитывая выражения $K_\alpha (x_n - x_m)$ из (13) в (20) для определения параметра α имеем следующее нелинейное алгебраическое уравнение

$$\sum_{i=1}^{k-1} (-\sum_{m=0}^{n-1} K_\alpha (x_n - x_m) y_m^i h + F_n - y_n^i) \times$$
$$\times \sum_{m=0}^{n-1} a \frac{-(x_n - x_m)^{1-\alpha} \ln(x_n - x_m)\Gamma(2-\alpha) + (x_n - x_m)^{1-\alpha} \int_0^\infty e^{-t} t^{1-\alpha} \ln t dt}{\Gamma^2(2-\alpha)} y_m^i h = 0 \ , \qquad (21)$$

где $K_\alpha (x_n - x_m)$ определяется формулой (13), а

$$\Gamma(2-\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{1-\alpha} dt \ , \qquad \frac{d\Gamma(2-\alpha)}{d\alpha} = -\int_0^\infty e^{-t} t^{1-\alpha} \ln t dt \ ,$$

$$\frac{\partial K_\alpha(x_n-x_m)}{\partial\alpha}=a\frac{-(x_n-x_m)^{1-\alpha}\ln(x_n-x_m)\Gamma(2-\alpha)+(x_n-x_m)^{1-\alpha}\int_0^\infty e^{-t}t^{1-\alpha}\ln t dt}{\Gamma^2(2-\alpha)}.$$

Решив алгебрическое уравнение (21) тем или иным методом [7] можем найти α.

5. Численная реализация:

Рассмотрим более упрощенный вариант задачи (1). Пуст в (12) $k=5$ и $l=1{,}1$, $n=10$, $x\in(x_0,1)$ разделим на 10 частей, т.е. приняв

$\alpha_1=1.1,\quad \alpha_2=1.3,\ \alpha_3=1.5,\quad \alpha_4=1.7,\quad \alpha_5=1.9$,

тогда

$$\begin{array}{l} x_0=0.1,\ x_1=0.2,\ x_2=0.3,\ x_3=0.4,\ x_4=0.5,\\ x_5=0.6,\ x_6=0.7,\ x_7=0.8,\ x_8=0.9,\ x_9=1,x_{10}=1{,}1\end{array} \text{ и } h=0.1.$$

В этом случае уравнение (21) примет вид

$$\sum_{i=1}^{5}\Big(-\sum_{m=0}^{9}K_\alpha(x_{10}-x_m)y_m^i h+F_{10}-y_{10}^i\Big)\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{9}a\frac{-(x_{10}-x_m)^{1-\alpha}\ln(x_{10}-x_m)\Gamma(2-\alpha)+(x_{10}-x_m)^{1-\alpha}\int_0^\infty e^{-t}t^{1-\alpha}\ln(t)dt}{\Gamma^2(2-\alpha)}=0$$

Здесь

$$K_\alpha(x_n-x_m)=a\frac{(x_n-x_m)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+b(x_n-x_m),$$

$$F_{10}=\sum_{k=0}^{9}(x_{10}-x_k)f(x)\cdot h+y_1(x_{10}-x_0),$$

$$\Gamma(2-\alpha)=\int_0^\infty e^{-t}t^{1-\alpha}dt.$$

Отметим что, y_m^i $\left(m=\overline{0,10},\ i=\overline{1,5}\right)$ являются статистическими данными соответствующей $\alpha_i\in(1,2)$. Действительно, находим y_m^i из (15) имеем следующую таблицу для статистических данных y_m^i , где $a=3$, $b=1$, $f=8$ (см [2,3,4]):

Таблица 1.

Значение статистических данных y_i^m

$i \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	-0.67	-1.37	-1.13	-1.00	-0.91	-0.84	-0.79	-0.74	-0.71	-0.67
2	0	-0.67	-2.45	-1.58	-1.15	-0.88	-0.68	-0.53	- 0.41	-0.31	-0.22
3	0	-0.67	-3.19	-1.62	-0.93	-0.51	-0.23	-0.02	0.13	0.26	0.37
4	0	-0.67	-2.86	-0.93	-0.16	0.25	0.53	0.72	0.87	0.98	1.08
5	0	-0.67	-0.34	0.81	1.22	1.44	1.57	1.66	1.72	1.77	1.81

где для конкретных $\alpha = \alpha_i$ значения статистических данных y_n^i определяются рекуррентной формулой

$$y_n^i = -K_{\alpha_i}(x_n - x_1)y_1^{\alpha_i} - K_{\alpha_i}(x_n - x_2)y_2^{\alpha_i} - \ldots - K_{\alpha_i}(x_n - x_{n-1})y_{n-1}^{\alpha_i} + F_n \quad , (22)$$

здесь

$$y_1^i = -K_{\alpha_i}(x_1 - x_0)y_0^i + F_i \quad , \qquad (23)$$

$$y_0^i = 0,$$

$$K_{\alpha_i}(x_n - x_k) = a\frac{(x_n - x_k)^{1-\alpha_i}}{(1-\alpha_i)!} + b(x_n - x_k), \qquad (24)$$

$$F_i = \sum_{k=0}^{i-1}(x_i - x_k)f(x_k)\cdot h + y_1(x_i - x_0) \quad , \; i = \overline{1,5} \; n = \overline{0,10} \; . \qquad (25)$$

Таким образом, для определения порядка α в уравнение (1) имеем следующий алгоритм

Алгоритм:

1. Задаются параметры a, b, F и ε - определяющий точность решения задачи.
2. Определяется отрезок $[\alpha_1, \alpha_2]$, где ищется корень функции $f(\alpha)$, где $f(\alpha_1)\cdot f(\alpha_2) < 0$
3. Задаются $N = 10$, $I = 4$.
4. Вычисляются значения статистических данных по формулам (22)-(25).
5. Вычисляются средняя точка $\alpha = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ и значения $y(\alpha)$ по формуле (18).

6. Если $|y(\alpha)| < \varepsilon$ процесс останавливается. Иначе, если $y(\alpha_1) \cdot y(\alpha) < 0$, обозначаем $\alpha_2 = \alpha$, а если $y(\alpha) \cdot y(\alpha_2) < 0$, то $\alpha_1 = \alpha$. Переходим к пункту 5.

Отметим, что задавая $n = \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{N}$, вычислим $\alpha_i = \alpha_1 + (i-1)h$ для $i = \overline{1, N+1}$ и определим значения функции $y(\alpha_i)$, график которой приведен на рис. 2.

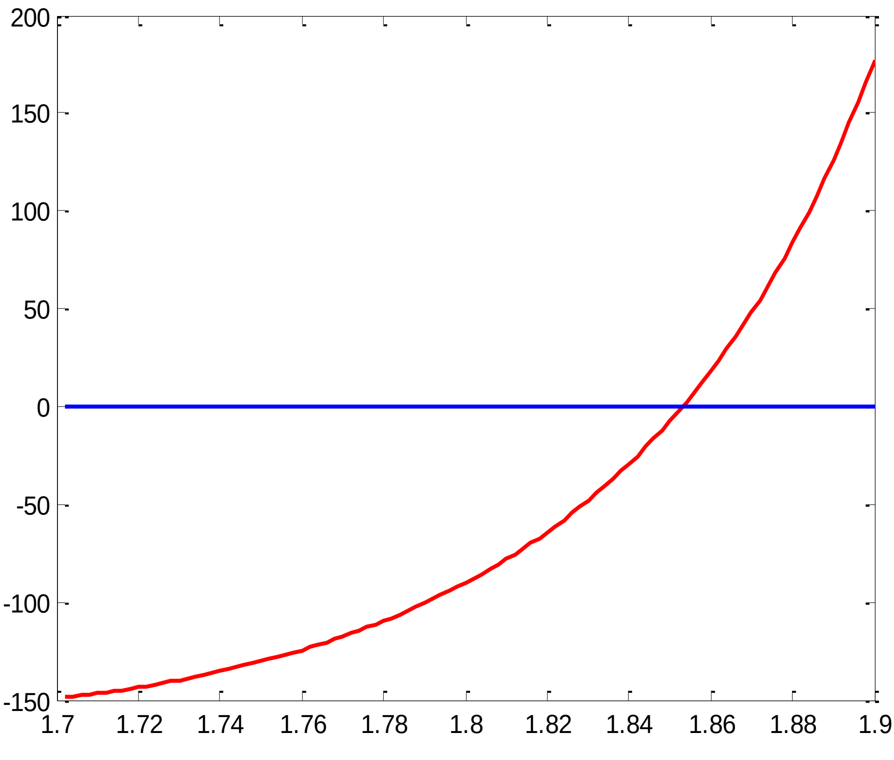

Рис. 2. График зависимости $y(\alpha)$ от α.

Заключение

Впервые приводится метод определения дробного порядка производных колебательных систем. На примере показывается, что в зависимости от информативности y_n^i (на каком интервале находится α) порядок α входит в соотвествующий интервал $(0,1)$ или $(1,2)$. Алгоритм нахождения корней α_i выполняется методом деления отрезка пополам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliev F.A., Aliev N.A. , Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I. Solution of linear fractional-derivative ordinary differential equations with constant matrix. Appl.Comp.Math, 17(3) (2018) 317-322
2. Aliev F.A., Ismailov N.A., Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process, Appl. Comput. Math. 12 (2013), 306–313.
3. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Asymptotic method for finding the coefficient of hydraulic resistance in lifting of fluid on tubing. Journal of Inverse and Ill-posed Problems, V. 23, N. 5, 2015, pp. 511–518.
4. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Rajabov M.F. Algorithm for calculating the parameters of formation of gas-liquid mixture in the shoe of gas lift well. Appl/Comp/Math., 2016, vol. 15,pp. 370-376.
5. Bagley R.L., Torvik P.L., On the fractional calculus models of viscoelastic behavior. J. Rheool, 30 (1986) 133-155
6. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J. On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients. Appl. Math. Comput., 2007, v.187, pp.68-78
7. Himmelblau D.M., Applied Nonlinear Programming, New-York, Craw-Hill Book Company, 1972, p.536
8. Lavrent’ev M.M., Romanov V.G., Vasil’ev V.G. Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations. Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 167, Berlin, Heidelberg, New York, 1970
9. Miller K. S., Ross B., An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, New York: Wiley, 1993, 336p.
10. Odibat Zaid M. Analytic study on linear systems of fractional differential equations. Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010), pp.1171-1183.
11. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993, 780 p.
12. Мейрманов А.М. Задача Стефана , Новосибирск: Наука, 1986, 239 с.
13. Муталлимов М.М., Алиев Ф.А. Методы решения задач оптимизации при эксплуатации нефтяных скважин. Saarbrücken (Deutscland), LAP LAMBERT, 2012, 164 с.

14. Петровски И.Г., Лекции по теории интегральных уравнений. М.: "Наука", 1965. - 128 стр.

IDENTIFICATION METHOD FOR DEFINING THE ORDER OF THE FRACTIONAL DERIVATIVE OSCILLATORY SYSTEM

F.A. Aliev[1], N.A. Aliev[1], M.M. Mutallimov[1], A.A. Namazov[1]

[1] Institute Applied of Mathematics, BSU, Baku, Azerbaijan
e-mail: f_aliev@yahoo.com
e-mail: mutallim@mail.ru
e-mail: atif.namazov@gmail.com

ABSTRACT

The work is devoted to determine the order of the fractional derivative, when the oscillatory process occurs inside Newtonian fluid. Firstly, the solution of the studied equation is reduced to the solution of the Volterra integral equation of the second kind, and the method of determining the order of the fractional derivative is presented using the least squares method. On a simple example the illustration of definition of this order is given.

Keywords: oscillatory system, fractional order derivative, the Volterra equation of the second kind, the least-squares method.

References

1. Aliev F.A., Aliev N.A. , Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I. Solution of linear fractional-derivative ordinary differential equations with constant matrix. Appl.Comp.Math, 17(3) (2018) 317-322
2. Aliev F.A., Ismailov N.A., Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process, Appl. Comput. Math. 12 (2013), 306–313.
3. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Asymptotic method for finding the coefficient of hydraulic resistance in lifting of fluid on tubing. Journal of Inverse and Ill-posed Problems, V. 23, N. 5, 2015, pp. 511–518.
4. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Rajabov M.F. Algorithm for calculating the parameters of formation of gas-liquid mixture in the shoe of gas lift well. Appl/Comp/Math., 2016, vol. 15,pp. 370-376.
5. Bagley R.L., Torvik P.L., On the fractional calculus models of viscoelastic behavior. J. Rheool, 30 (1986) 133-155
6. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J. On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients. Appl. Math. Comput., 2007, v.187, pp.68-78

7. Himmelblau D.M., Applied Nonlinear Programming, New-York, Craw-Hill Book Company, 1972, p.536
8. Lavrent’ev M.M., Romanov V.G., Vasil’ev V.G. Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations. Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 167, Berlin, Heidelberg, New York, 1970
9. Miller K. S., Ross B., An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, New York: Wiley, 1993, 336p.
10. Odibat Zaid M. Analytic study on linear systems of fractional differential equations. Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010), pp.1171-1183.
11. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993, 780 p.
12. Meyrmanov A.M. Zadacha Stefana , Novosibirsk: Nauka, 1986, 239 s. (Meyrmanov A.M., Problems of Stephan, Novosibirsk: Education, 1986, 239 p)
13. Mutallimov M.M., Aliev F.A. Metody resheniya zadach optimizatsii pri ekspluatatsii neftyanykh skvazhin. Saarbrücken (Deutscland), LAP LAMBERT, 2012, 164 c.
(Mutallimov M.M., Aliev F.A. Metods for solving optimization problems in the operation of oil wells, Saarbrücken (Deutscland), LAP LAMBERT, 2012, 164p) (in Russian)
14. Petrovski I.G., Lektsii po teorii integral'nykh uravneniy. M.: "Nauka", 1965. - 128 str.(I.G. Petrovskii, Lectures on the theoryof integral equations M: Education, 1965, 128 p) (in Russian)